



Pannon Egyetem
Műszaki Informatikai Kar
Matematika Tanszék

Matematikai feladatmegoldó verseny 2014/15.
3. forduló

1. Számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat!

(a) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} dx$ (10 pont)

(b) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{e^x + 1}} dx$ (10 pont)

2. Legyen $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris transzformáció, melynek karakterisztikus polinomja $P(\lambda)$. Igazolható, hogy ekkor $P(\lambda)$ λ -ra nézve olyan n -ed fokú polinom, amelynek főegyütthatója $(-1)^n$, konstans tagja $\det(A)$.

Mutassa meg az alábbiakat:

(a) Ha n páratlan, akkor

(1) $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} P(\lambda) = -\infty, \quad \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} P(\lambda) = \infty$

(2) Az A lineáris transzformációnak létezik valós sajátértéke, mégpedig $\det(A) > 0$ esetén biztosan van pozitív sajátértéke, $\det(A) < 0$ esetén biztosan van negatív sajátértéke.

(b) Ha n páros, akkor

(1) $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} P(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} P(\lambda) = \infty$

(2) Ha $\det(A) < 0$, akkor A -nak van pozitív és negatív sajátértéke is.

(10 pont)

3. Tekintsük a $C(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ folytonos}\}$ absztrakt vektorteret. Értelmezzük az $f, g \in C(I)$ függvények skaláris szorzatát az

$$\langle f, g \rangle := \int_I f \cdot g$$

formulával. Legyen

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto 2x^2,$$

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x + 1.$$

- (a) Határozza meg az $\langle f, g \rangle$ skaláris szorzatot és az $\|f\|$ és $\|g\|$ normákat!
- (b) Adja meg a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenség konkrét alakját a fenti vektortérben, és ellenőrizze azt az f és g függvények példáján!

(10 pont)

4. Igazolja az

$$(A \vee B \vee C) \wedge (B \vee C \vee D) \wedge (C \vee D \vee A) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge D) \vee (B \wedge D) \vee C$$

logikai ekvivalenciát!

(10 pont)

5. Mutassa meg, hogy egy olyan csoport, ahol az egységelem kivételével minden elem másodrendű, mindig kommutatív!

(10 pont)

Beadási határidő: **2015. január 6.**

Kérjük, hogy a beadott lapokon nyomtatott betűkkel a nevet, szakot, Neptun kódot tüntessék fel!