



Pannon Egyetem
Műszaki Informatikai Kar
Matematika Tanszék

Matematikai feladatmegoldó verseny 2016/17
3. forduló

1. (a) A hatványfüggvények konvexitás szempontjából való viselkedését felhasználva igazolja, hogy

$$(\alpha y^r + \beta z^r)^{\frac{1}{r}} \leq \alpha y + \beta z, \quad (1)$$

ahol $y, z > 0$, $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$, és $r \leq 1$, $r \neq 0$.

- (b) Milyen egyenlőtlenséget kapunk az (1)-ből $r \rightarrow 0$ esetén?

(10 pont)

2. Határozza meg az

$$\int \frac{1}{(x+2)^{1/2} + (x-2)^{1/2}} dx, \quad x > 2$$

integrált az $x = t^2 + \frac{1}{t^2}$, $t > 1$ helyettesítéssel.

(10 pont)

3. (a) Igazolja, hogy ha $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ vektor λ sajátértékű sajátvektora az $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris transzformációnak, akkor sajátvektora az $\mathcal{A} + \alpha \cdot id_{\mathbb{R}^n}$ lineáris transzformációnak is, mégpedig $\lambda + \alpha$ sajátértékű sajátvektora!

- (b) Határozza meg az $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1 + x_2, -2x_1 + 4x_2, x_1 + 2x_2)$ lineáris transzformáció sajátértékeit! A fenti állítás felhasználásával adja meg a $\mathcal{B} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (3x_1 + x_2, -2x_1 + 6x_2, x_1 + 2x_2 + 2x_3)$ lineáris transzformáció sajátértékeit! Ellenőrizze, hogy ezek valóban kielégítik a \mathcal{B} transzformáció karakterisztikus egyenletét!

(10 pont)

4. Legyen $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$ ortogonális bázis \mathbb{R}^n -ben, továbbá $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges vektor. Mutassa meg, hogy az \underline{x} vektor B bázisra vonatkozó i -edik koordinátája éppen az \underline{x} vektor \underline{b}_i bázisvektorra vonatkozó Fourier együtthatójával egyenlő, ahol $i = 1, \dots, n$.

(10 pont)

5. Mutassa meg, hogy a folytonos $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények halmaza kontinuum számosságú!

(10 pont)

6. Hogyan szól pontosan Platón

$$”(H \vee F) \rightarrow \neg N ” \quad (2)$$

mondása? (N = énekel, H = éhezik, F = fázik)

- a: *"Napsütötte államokban jóllakott ének száll mindenfelé."*
- b: *"Hallgatók énekesek éheznek és fáznak."*
- c: *"Minden női dallam elbűvöl melegségével vagy a jóllakottság érzésével."*
- d: *"Nincs ének sem lakoma, fagyos minden."*
- e: *"Nincs madár, mely akkor énekeljen, midőn éhezik vagy fázik."*

Amelyik mondat nem egyezik a (2) formulával, annak is adja meg a logikai képletét!

(10 pont)

Beadási határidő: **2017. február 03. (péntek) 13:00 óra**

Kérjük, hogy a beadott lapokon nyomtatott betűkkel a nevet, szakot, Neptun kódot tüntessék fel!