



**Pannon Egyetem**  
**Műszaki Informatikai Kar**  
**Matematika Tanszék**

**Matematikai feladatmegoldó verseny 2017/18**  
**3. forduló**

1. Konvergens-e az  $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+e^{-2x}} dx$  improprius integrál? (5 pont)
2. Igazolja, hogy az  $\int \frac{1}{(x+2)^{3/2} + (x-2)^{3/2}} dx$  integrál az  $x = t^2 + t^{-2}$  ( $t > 0$ ) helyettesítéssel visszavezethető racionális törtfüggvény integrálására! (5 pont)
3. a) Adja meg a  $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg}(x) - \frac{1}{x}$  határértéket! (4 pont)
- b) Adja meg a  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg}(x) - \frac{1}{x}}{3^x - \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})}$  határértéket! (6 pont)
4. Az  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrixot *ortogonálisnak* nevezzük, ha  $A^{-1} = A^T$ .  
Mutassa meg az alábbiakat:
- a) Egy ortogonális mátrix inverze is ortogonális.
- b) Ha  $A$  és  $B$  ortogonális, akkor  $A \cdot B$  is ortogonális.
- c) Ha  $A$  ortogonális, akkor  $\det(A) = 1$  vagy  $\det(A) = -1$ . (12 pont)
5. Igazolja, hogy ha a  $\underline{v}$  vektor  $\lambda$  sajátértékű sajátvektora az  $\mathcal{A}$  lineáris transzformációnak, akkor a  $\underline{v}$  vektor  $\lambda^2$  sajátértékű sajátvektora az  $\mathcal{A} \circ \mathcal{A}$  lineáris transzformációnak.  
Hogyan általánosítható az állítás? (8 pont)
6. Határozza meg az alábbi halmazok számoságait:
- a) 0 és 1 karaktereket tartalmazó véges (akármilyen hosszú) jelsorozatok,
- b) 0 és 1 karaktereket tartalmazó végtelen hosszú jelsorozatok,
- c) bármilyen természetes számokból álló, vesszővel elválasztott véges (akármilyen hosszú) jelsorozatok,
- d) bármilyen természetes számokból álló, vesszővel elválasztott végtelen hosszú jelsorozatok. (10 pont)

7. a) Oldja meg a  $z^6 + 3 = 0$  egyenletet!

b) Bontsa fel a  $z^6 + 3$  polinomot valós együtthatójú, legfeljebb másodfokú polinomok szorzatára! Lehet-e elsőfokú tényező a felbontásban? (10 pont)

**Beadási határidő: 2017. február 5. (hétfő), 12:00**

A feladatok megoldásait 2018. február 7. (szerda) 18:00-kor beszéljük meg a Matematika Tanszék könyvtárában (I. ép. 314.)

Kérjük, hogy a beadott lapokon nyomtatott betűkkel a nevet, szakot, Neptun kódot tüntessék fel!